

3.绝对值的化简求值(二)

一、 无条件的绝对值化简

1. 零点分段法

化简代数式 $|x+1|+|x-2|$ 时,可令_____和_____,分别求得 $x=-1$, $x=2$ (称 -1 , 2 分别为 $|x+1|$ 与 $|x-2|$ 的零点值).在实数范围内,零点值 $x=-1$ 和 $x=2$ 可将全体实数分成不重复且不遗漏的如下3种情况:

(1) $x < -1$;

(2) $-1 \leq x < 2$;

(3) $x \geq 2$.从而化简代数式 $|x+1|+|x-2|$ 可分以下3种情况:

①当 $x < -1$ 时,原式_____;

②当 $-1 \leq x < 2$ 时,原式_____;

③当 $x \geq 2$ 时,原式_____.

综上所述,原式=
$$\begin{cases} -2x+1(x < -1) \\ 3(-1 \leq x < 2) \\ 2x-1(x \geq 2) \end{cases}.$$

【总结】零点分段讨论法的一般步骤:

- ①找零点(使绝对值等于___的字母的值);
- ②分区间, n 个零点将数轴分成 $(n+1)$ 段(区间)、也即 $(n+1)$ 个要讨论的范围;
- ③先讨论,在 $(n+1)$ 段范围内分别对绝对值进行化简;
- ④再综合,最后用大括号的形式将上述讨论结果呈现.

 举个“栗子”

 栗子1

1. 化简: $-3|x+2|$

栗子2

2. 化简： $|x-1|+|x-2|$.

3. 化简： $|x-1|-|x-2|$.

栗子3

4. $|x+1|+|x-2|+|x-3|$ 的值为 _____ .

栗子4

5. $|x-3|+|x-2|+|x+1|+|x+2|$ 的最小值是 _____ .

栗子5

6. 化简： $||2x-3|-1|$.

二、绝对值的最值问题

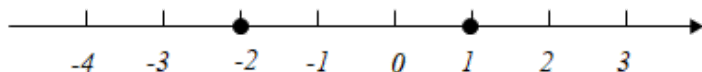
🧠 两个绝对值的和最小问题

1. 两个绝对值的和最小问题

比如，求 $|x - 1| + |x + 2|$ 的最小值，

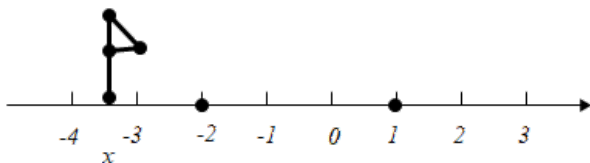
先翻译，原式几何意义为_____；

再画图， -2 对应点与 1 对应点将数轴分成3个部分： -2 对应点左边， -2 对应点与 1 对应点之间， 1 对应点右边；

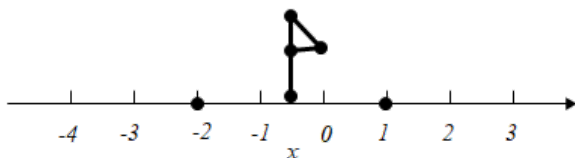


然后分类讨论：

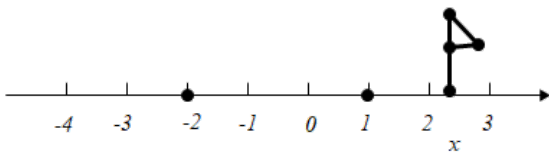
①若 x 对应点在 -2 对应点左边，则 x 对应点到 -2 对应点与 x 对应点到 1 对应点的距离和大于_____；



②若 x 对应点在 -2 对应点和 1 对应点之间，则 x 对应点到 -2 对应点与 x 对应点到 1 对应点的距离和等于_____；



③若 x 对应点在 1 对应点右边，则 x 对应点到 -2 对应点与 x 对应点到 1 对应点的距离和大于_____；



也就是说 x 对应点到 -2 对应点与 x 对应点到 1 对应点的距离和大于等于3，

从而 $|x - 1| + |x + 2|$ 的最小值为_____，此时 x 的范围是_____。

栗子6

7. 当式子 $|x + 2| + |x - 10|$ 取得最小值时， x 的取值范围为（ ）。

A. $-2 \leq x < 10$

B. $-2 \leq x \leq 10$

C. $x = -2$ 或 $x = 10$

D. $-2 < x \leq 10$

栗子7

8. 代数式 $|x - 4| + |x + 5|$ 的最小值是_____.

栗子8

9. 代数式 $|x - 1| + |x + a|$ 的最小值是2,则 a 的值是_____.

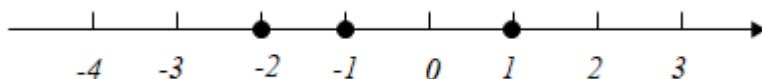
三个绝对值的和最小问题

2. 三个绝对值的和最小问题

比如, 求 $|x - 1| + |x + 2| + |x + 1|$ 的最小值,

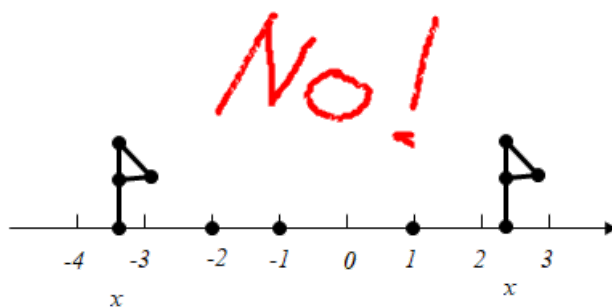
先翻译, 原式几何意义为_____;

再画图, -2 对应点、 -1 对应点与 1 对应点将数轴分成4个部分: -2 对应点左边、 -2 对应点与 -1 对应点之间、 -1 对应点与 1 对应点之间、 1 对应点右边;



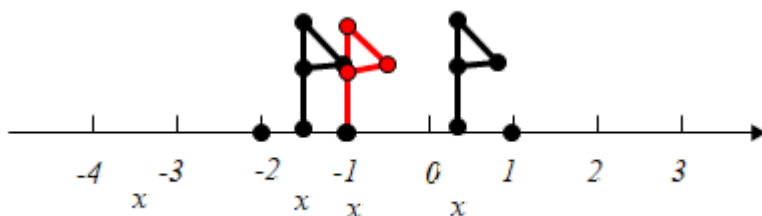
然后分类讨论:

①由上例可知, 若 $|x - 1| + |x + 2|$ 要取最小值, x 对应点不能在 -2 对应点左边, 也不能在 1 对应点右边;



所以 x 对应点应在 -2 对应点和 1 对应点之间, 此时 $|x - 1| + |x + 2|$ 取到最小值—— x 对应点到 -2 对应点、到 1 对应点的距离和, 等于____, 原式_____

② x 对应点应在 -2 对应点和 1 对应点之间, 由图可知当_____时, $|x + 1|$ 即 x 对应点到 -1 对应点的距离最小;



所以 $|x - 1| + |x + 2| + |x + 1|$ 的最小值为____, 此时 x 的范围是_____.

栗子9

10. 若 x 表示一个有理数，代数式 $|x+2|+|x-5|$ 的最小值是_____．代数式 $|x-1|+|x+2|+|x-5|$ 的最小值是_____．

栗子10

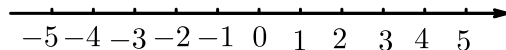
11. 已知 $|x+2|+|1-x|=9-|y-5|-|1+y|$ ，求 $x+y$ 最大值与最小值．

栗子11

12. 同学们都知道： $|3-(-2)|$ 表示3与-2之差的绝对值，实际上也可理解为3与-2两数在数轴上所对应的两点之间的距离．请你借助数轴进行以下探索：
- (1) 数轴上表示 x 与3的两点之间的距离可以表示为_____．
 - (2) 如果 $|x-3|=5$ ，则 $x=_____$ ．
 - (3) 同理 $|x+2|+|x-1|$ 表示数轴上有理数 x 所对应的点到-2和1所对应的点的距离之和，请你找出所有符合条件的整数 x ，使得 $|x+2|+|x-1|=3$ ，这样的整数是_____．
 - (4) 由以上探索猜想对于任何有理数 x ， $|x+3|+|x-6|$ 是否有最小值？如果有，直接写出最小值；如果没有，说明理由．

栗子12

13. 结合数轴与绝对值的知识回答下列问题：



- (1) 数轴上表示3和2的两点之间的距离是 _____，表示-2和1两点之间的距离是 _____，一般地，数轴上表示数 m 和数 n 的两点之间的距离等于 $|m - n|$ 。
- (2) 如果 $|x + 1| = 2$ ，那么 $x =$ _____。
- (3) 若 $|a - 3| = 4$ ， $|b + 2| = 3$ ，且数 a ， b 在数轴上表示的数分别是点 A ，点 B ，则 A ， B 两点间的最大距离是 _____，最小距离是 _____。
- (4) 若数轴上表示数 a 的点位于-3与5之间，则 $|a + 3| + |a - 5| =$ _____。
- (5) 当 $a =$ _____ 时， $|a - 1| + |a + 5| + |a - 4|$ 的值最小，最小值是 _____。

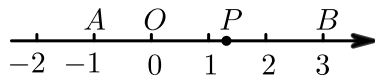
栗子13

14. 请解答下列各题：

- (1) 数轴上表示 x 和-2的两点 A 和 B 之间的距离表示为 _____，如果 $|AB| = 5$ ，那么 $x =$ _____。
- (2) 若点 A 表示的整数为 x ，则当 $x =$ _____ 时， $|x + 4| = |x - 2|$ 。
- (3) 要使 $|x + 3| + |x - 2|$ 取最小值时，相应的 x 的取值范围是 _____，最小值是 _____。
- (4) 已知 $|x + 2| + |x - 1| + |y + 1| + |y - 2| = 6$ ，则 $x + 2y$ 的最大值为 _____，最小值为 _____。

独步天下

15. 数轴上两点之间的距离等于相对应的两数差的绝对值。



- (1) 数轴上表示2和5的两点之间的距离是 _____；数轴上表示-2和-8的两点之间的距离是 _____。
- (2) 数轴上表示数 x 和-1的两点之间的距离是2，那么 x 为 _____。
- (3) 若某动点表示的数为 x ，当式子 $|x + 1| + |x - 2|$ 取得最小值时，相应的 x 的范围是 _____。
- (4) 若某动点表示的数为 x ，已知数轴上两点 A 、 B 对应的数分别为-1、3，点 P 为点 A 点 B 之间的一点（不与 A ， B 重合），点 P 对应的数为 p 。则式子 $|x - p| + |x - 3| + |x - p - 15|$ 的最小值是 _____。